

Title	優先権のある混合入力待ち行列モデルの解析(待ち行列理論とその応用)
Author(s)	住田, 修一
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 490: 89-107
Issue Date	1983-05
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/103520">http://hdl.handle.net/2433/103520</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 優先権のある混合入力待ち行列モデルの解析

電電公社武蔵野電気通信研究所

住田 修一 (Shuichi Sumita)

## 1. まえがき

多元パケット交換<sup>(1)</sup>、音声・データの複合伝送<sup>(2)</sup>等、トラヒック特性（到着過程、処理時間）の異なる複数種類の呼を統合して交換・伝送するシステムの処理方式の1つとして優先権処理方式が用いられる。本稿では、優先権処理方式の基本モデルの1つである、優先権のある混合入力待ち行列モデルを解析する。ここで、混合入力とは、到着間隔が一般分布に従う呼（GI呼）と指数分布に従う呼（ポアソン呼）の2種類の呼が加わることを意味する。

優先権のある混合入力待ち行列モデルの過去の研究状況を説明するためモデルを図1のように分類する。Hooke<sup>(3)</sup>が、一般処理時間分布条件で、モデルA, CのGI呼の仮待ち時間分布をGI/G/1モデルの仮待ち時間分布を用いて表現している。Schassberger<sup>(4)</sup>は、GI呼の到着間隔分布、両呼の処理時

間分布を相型とし，モデル A, B, C, D すべてについて系内呼数の同時分布が満たす平衡方程式を求めている。母関数の手法を用いて平衡方程式を解析し，関数方程式を解く問題に帰着し，解法の指針を与えている。又，モデル A, C の GI 呼の待ち時間分布を，GI/G/1 モデルの待ち時間分布を用いて表現している。Schönherr<sup>(5)</sup> は，モデル A, C の GI 呼の待ち時間のモーメントの存在条件について検討している。Barberis<sup>(6)</sup> は，GI 呼とポアソン呼の処理時間が，同一の指数分布処理時間の場合に，保存則<sup>(7)</sup>と Kuczura<sup>(8)</sup>の結果を用いてモデル C の呼種別の平均待ち時間を求める手法を提案している。

以上が図 1 に示す各モデルの従来の研究結果であるが，結果が形式的表現にとどまっていること（文献(3),(4),(5)），複雑で，数値計算に不向きであること（文献(4)）等から，数値計算

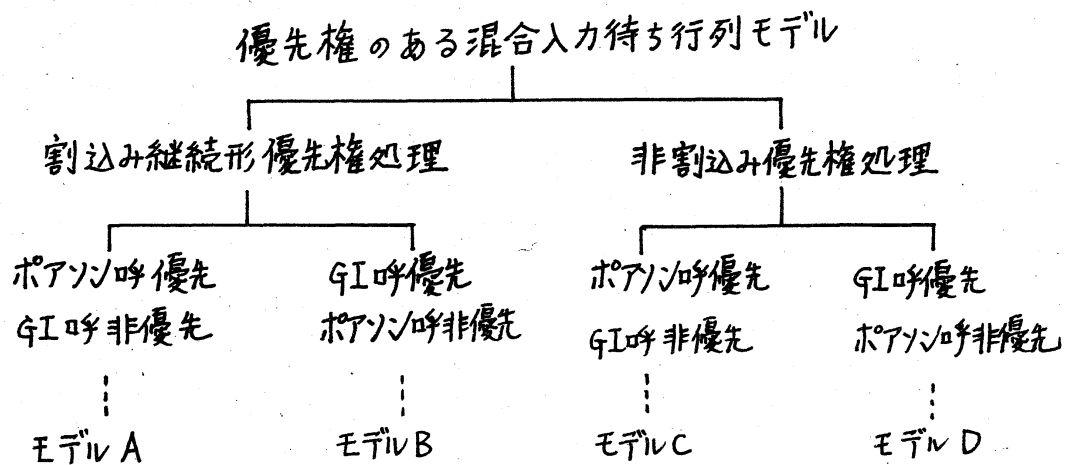


図 1 優先権のある混合入力待ち行列モデルの分類

上必ずしも満足のいく結果ではない。

本稿では、モデルBを部分マルコフ過程の理論<sup>(9)</sup>を用いて解析する。

## 2. モデルの説明

- (1) 到着間隔が平均  $1/\lambda_1$  の一般分布  $G(t)$  に従う呼 (GI呼) と平均  $1/\lambda_2$  の指数分布に従う呼 (ポアソン呼) が互いに独立に単一サーバに加わる。
- (2) GI呼, ポアソン呼の処理時間は, それぞれ, 平均  $1/\mu_1$ ,  $1/\mu_2$  の指数分布に従うとする。
- (3) GI呼がポアソン呼に対して割込み継続形優先権をもつとする。同一呼種内では, 先着順処理に従うとする。
- (4) 待ち室の容量は, 無限とする。

## 3. 解析

Kuczura<sup>(9)</sup>の方法に従って解析する。

### 3.1 定式化

時刻  $t$  におけるGI呼の系内呼数を  $z_1(t)$ , ポアソン呼の系内呼数を  $z_2(t)$  とする。 $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$  は, GI呼の到着時点を再生点とする部分マルコフ過程となる。 $\{t_n\} (n=0,1,\dots)$  を再生点の列とする。 $z(t)$  の区間  $[t_n, t_{n+1})$  内の遷移確率

$$P_{(k,l),(i,j)}(t) \triangleq \Pr\{\mathfrak{Z}(t+S)=(i,j) | \mathfrak{Z}(S)=(k,l)\} \quad t_n \leq S < t+S < t_{n+1} \quad (3.1)$$

は、以下となる。

$$P_{(k,l),(i,j)}(t) = \frac{(\mu_1 t)^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu_1 t} \cdot \frac{(\lambda_2 t)^{j-l}}{(j-l)!} e^{-\lambda_2 t} \quad 1 \leq i \leq k, 0 \leq l \leq j \quad (3.2)$$

$$P_{(k,l),(0,j)}(t) = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 \tau)^n}{n!} e^{-\lambda_2 \tau} \cdot \frac{\mu_1^k \tau^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu_1 \tau} \cdot g_{l+n,j}(t-\tau) d\tau$$

$$k \geq 1, l \geq 0, j \geq 0 \quad (3.3)$$

$$P_{(0,l),(0,j)}(t) = g_{l,j}(t) \quad l \geq 0, j \geq 0 \quad (3.4)$$

ここで、 $g_{l,j}(t)$  は、到着率  $\lambda_2$ 、処理率  $\mu_2$  の  $M/M/1$  モデルの、 $t$  時間内に系内呼数  $l$  から系内呼数  $j$  へ遷移する確率である。後の解析が必要となるため  $g_{l,j}(t)$  のラプラス変換  $\tilde{g}_{l,j}(s)$  を付録 1 に示す。

$\mathfrak{Z}_n \triangleq \mathfrak{Z}(t_n - 0)$  と定義する\*。再生点直前に着目した隠れマルコフ連鎖  $\{\mathfrak{Z}_n\}$  の遷移確率

$$V_{(k,l),(i,j)} \triangleq \Pr\{\mathfrak{Z}_n = (i,j) | \mathfrak{Z}_{n-1} = (k,l)\} \quad n \geq 1 \quad (3.5)$$

は、式 (3.2), (3.3) を用いると以下となる。(式 (3.4) は不要)

$$V_{(k,l),(i,j)} = \int_0^{\infty} \frac{(\mu_1 t)^{k+1-i}}{(k+1-i)!} e^{-\mu_1 t} \cdot \frac{(\lambda_2 t)^{j-l}}{(j-l)!} e^{-\lambda_2 t} dG(t) \quad 1 \leq i \leq k+1, 0 \leq j \leq l \quad (3.6)$$

\*  $t_n - 0$  は、時刻  $t_n$  の直前を表すものとする。

$$r_{(k,l),(0,j)} = \int_0^\infty \left[ \int_0^t \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda_2 \tau)^n}{n!} e^{-\lambda_2 \tau} \frac{\mu_1^{k+1} \tau^k}{k!} e^{-\mu_1 \tau} p_{l+n,j}(t-\tau) d\tau \right] dG(t)$$

$$k \geq 0, l \geq 0, j \geq 0 \quad (3.7)$$

隠れマルコフ連鎖  $\{X_n\}$  の定常確率

$$\pi_{ij} \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{X_n = (i, j) \mid X_0 = (k, l)\} \quad (3.8)$$

は以下の平衡方程式を満足する。

$$\pi_{i,j} = \sum_{k=i-1}^\infty \sum_{l=0}^j \pi_{k,l} r_{(k,l),(i,j)} \quad i \geq 0, j \geq 0 \quad (3.9)$$

$$\pi_{0,j} = \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty \pi_{k,l} r_{(k,l),(0,j)} \quad j \geq 0 \quad (3.10)$$

又、正規化条件は以下である。

$$\sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty \pi_{i,j} = 1 \quad (3.11)$$

### 3.2 隠れマルコフ連鎖の解析

平衡方程式(3.9), (3.10)を解くため以下の母関数を定義する。

$$\Pi_i(y) \triangleq \sum_{j=0}^\infty \pi_{i,j} y^j \quad (3.12)$$

式(3.9)より  $\Pi_i(y)$  に関する以下の関係式を得る。

$$\Pi_i(y) = \sum_{k=i-1}^\infty \Pi_k(y) \int_0^\infty \frac{(\mu_1 t)^{k+1-i}}{(k+1-i)!} \exp[-\{\mu_1 + \lambda_2(1-y)\}t] dG(t) \quad i \geq 1 \quad (3.13)$$

式(3.10)より以下の関係式を得る。

$$\Pi_0(y) = \int_0^\infty Q(y, t) dG(t) \quad (3.14)$$

ここで,

$$Q(y, t) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \pi_{k,l} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 \tau)^n}{n!} e^{-\lambda_2 \tau} \frac{\mu_1^{k+1} \tau^k}{k!} e^{-\mu_1 \tau y} g_{k+n,j}(t-\tau) d\tau \quad (3.15)$$

GI呼の到着間隔分布  $G(t)$  を

$$dG(t) = e^{-at} dH(t) \quad a > 0 \quad (3.16)$$

のようにおくと, 式(3.14)は以下の複素積分の形で表される。<sup>(8)</sup>

$$\pi_0(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{Q}(y, s) \tilde{G}(-s) ds \quad (3.17)$$

ここで,  $\tilde{Q}(y, s)$  は,  $Q(y, t)$  の  $t$  に関するラプラス変換,  $\tilde{G}(s)$  は,  $G(t)$  のラプラス・ステルチス変換(LST)である。 $G(t)$  が式(3.16)の形における場合について解析を進める。超指数分布, アーラン分布等は, 式(3.16)のようにおける。

付録1の式(A.1.1)を用いて  $\tilde{Q}(y, s)$  を計算すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(y, s) = & \frac{1}{(1-\tilde{B}(s))\{\lambda_2 y^2 - (\lambda_2 + \mu_2 + s)y + \mu_2\}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (1-y) [\tilde{B}(s)]^{n+1} \pi_k(\tilde{B}(s)) \right. \\ & \left. - y^{n+1} (1-\tilde{B}(s)) \pi_k(y) \right\} \cdot \frac{(n+k)!}{n!k!} \lambda_2^n \mu_1^{k+1} \left( \frac{1}{\lambda_2 + \mu_1 + s} \right)^{n+k+1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

ここで,  $\tilde{B}(s)$  は, 到着率  $\lambda_2$ , 処理率  $\mu_2$  の  $M/M/1$  モデルの全稼働期間分布のLSTである。

$\pi_i(y)$  に関する方程式を解くため次式を仮定する。

$$\pi_i(y) = g(y) [f(y)]^i \quad i \geq 0 \quad (3.19)$$

$g(y)$ ,  $f(y)$  は未知関数である。式(3.19)を式(3.13)に代入すると、 $f(y)$ を未知関数とする以下の方程式を得る。

$$f(y) = \tilde{G}\{\lambda_2(1-y) + \mu_1(1-f(y))\} \quad (3.20)$$

又、式(3.19)を式(3.18)に代入すると  $\tilde{Q}(y, s)$  として次式を得る。式(3.18), (3.21)の導出を付録2に示す。

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(y, s) = & \frac{\mu_1}{(1-\tilde{B}(s))\{\lambda_2 y^2 - (\lambda_2 + \mu_2 + s)y + \mu_2\}} \left\{ \frac{(1-y)\tilde{B}(s)g(\tilde{B}(s))}{s + \lambda_2(1-\tilde{B}(s)) + \mu_1(1-f(\tilde{B}(s)))} \right. \\ & \left. - \frac{(1-\tilde{B}(s))yg(y)}{s + \lambda_2(1-y) + \mu_1(1-f(y))} \right\} \quad (3.21) \end{aligned}$$

以上、 $\pi_i(y) \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i,j} y^j$  を  $\pi_i(y) = g(y)[f(y)]^i$  とおいたとき、 $f(y)$  は、方程式(3.20)の解であり、又  $g(y)$  は、式(3.17), (3.21)から定まることを導いた。但し、 $g(y)$ ,  $f(y)$  は、以下の条件式(3.23), (3.24), (3.25)を満足しなければならない。

$|y| \leq 1$  を満たす  $y$  について、

$$|\pi_i(y)| < 1 \quad (3.22)$$

であるから、 $|y| \leq 1$  を満たす  $y$  について、

$$|g(y)| < 1 \quad (3.23)$$

又、 $|y| \leq 1$  を満たす  $y$  について  $\sum_{i=0}^{\infty} |\pi_i(y)|$  が収束する条件から

$$|f(y)| < 1 \quad (3.24)$$

$y = 1$  のとき、 $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(1) = 1$  (正規化条件) から、



$$g(1) = 1 - f(1) \quad (3.25)$$

$f(y)$  に関して次の定理が成立つ。

[定理]  $\lambda_1/\mu_1 < 1$ ,  $|y| \leq 1$  ならば, 関数方程式

$$f(y) = \tilde{G}\{\lambda_2(1-y) + \mu_1(1-f(y))\}$$

の解  $f(y)$  で,  $|f(y)| < 1$  を満足するものが唯一つ存在し, 以下で与えられる。

$$f(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-\mu_1)^{j-1}}{j!} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} [\tilde{G}(s)]^j \Big|_{s=\mu_1+\lambda_2(1-y)} \quad (3.26)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_1^{j-1}}{j!} \int_0^{\infty} t^{j-1} \exp[-\{\mu_1+\lambda_2(1-y)\}t] dG^{*j}(t) \quad (3.27)$$

ここで,  $G^{*j}(t)$  は,  $G(t)$  の  $j$  回畳み込みを表す。

(証明) 十分小さい  $\varepsilon > 0$  をとり,  $|y| \leq 1$ ,  $|z| = 1 - \varepsilon$  である  $y, z$  に対して,

$$|\tilde{G}\{\lambda_2(1-y) + \mu_1(1-z)\}| < |z| = 1 - \varepsilon \quad (3.28)$$

を証明する。  $|\tilde{G}\{\lambda_2(1-y) + \mu_1(1-z)\}|$  を評価すると,

$$\begin{aligned} |\tilde{G}\{\lambda_2(1-y) + \mu_1(1-z)\}| &= \left| \int_0^{\infty} \exp[-\{\lambda_2(1-y) + \mu_1(1-z)\}t] dG(t) \right| \\ &\leq \int_0^{\infty} |\exp[-\{\lambda_2(1-y) + \mu_1(1-z)\}t]| dG(t) \\ &\leq \int_0^{\infty} \exp[-\{\lambda_2(1-|y|) + \mu_1(1-|z|)\}t] dG(t) \\ &\leq \int_0^{\infty} \exp(-\mu_1 \varepsilon t) dG(t) = \tilde{G}(\mu_1 \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$\tilde{G}(\mu_1 \varepsilon) = 1 + \tilde{G}'(0)\mu_1 \varepsilon + O(\varepsilon)$ , かつ  $\tilde{G}'(0) = -1/\lambda_1$  であるから,

$$\tilde{G}(\mu_1 \varepsilon) = 1 - \mu_1 \varepsilon / \lambda_1 + O(\varepsilon) \quad (3.30)$$

よって,  $\lambda_1 / \mu_1 < 1$  ならば, 式(3.30)より

$$\tilde{G}(\mu_1 \varepsilon) < 1 - \varepsilon \quad (3.31)$$

式(3.29), (3.31)より, 式(3.28)が証明された。

式(3.28)の關係にル-シェの定理を適用すると,  $z$  と  $z - \tilde{G}\{\lambda_2(1-y) + \mu_1(1-z)\}$  は,  $|z| < 1 - \varepsilon$  の領域に同数の零点をもつことが言える。従って,  $z - \tilde{G}\{\lambda_2(1-y) + \mu_1(1-z)\}$  は,  $|z| < 1 - \varepsilon$  の領域に零点を唯一つもつ。この零点が  $f(y)$  である。

式(3.29), (3.30) はラグランジュの展開定理を適用すれば導出される。

(証明終)

以上の定理より  $f(y)$  が決定した。次に  $g(y)$  を求める。 $g(y)$  を求めるには,  $G(t)$  の分布形を具体的に与える必要がある。本稿では, 一例として,  $G(t)$  が  $n$  次の超指数分布の場合について  $g(y)$  を求める。 $G(t)$  が式(3.1b)のようにおける他の分布(例えば, アーラン分布)の場合にも同様の手続きで決定できる。

$G(t)$  を以下のようにおく。

$$G(t) = 1 - \sum_{m=1}^n g_m e^{-\lambda_{1,m} t} \quad (\text{但し, } \sum_{m=1}^n g_m = 1) \quad (3.32)$$

式(3.17), (3.21)より次式を得る。

$$g(y) = \frac{B(y)}{A(y)} \quad (3.33)$$

ここで,

$$A(y) \triangleq 1 + \sum_{m=1}^n \frac{\delta_m \lambda_{1,m} \mu_1 y}{\{\lambda_2 y^2 - (\lambda_2 + \mu_2 + \lambda_{1,m})y + \mu_2\} \{\lambda_{1,m} + \lambda_2(1-y) + \mu_1(1-f(y))\}} \quad (3.34)$$

$$B(y) \triangleq \sum_{m=1}^n \frac{(1-y) \delta_m \lambda_{1,m} \mu_1 \tilde{B}(\lambda_{1,m}) g(\tilde{B}(\lambda_{1,m}))}{(1-\tilde{B}(\lambda_{1,m})) \{\lambda_2 y^2 - (\lambda_2 + \mu_2 + \lambda_{1,m})y + \mu_2\} \{\lambda_{1,m} + \lambda_2(1-\tilde{B}(\lambda_{1,m})) + \mu_1(1-f(\tilde{B}(\lambda_{1,m})))\}} \quad (3.35)$$

式(3.33)の右辺には未知定数  $g(\tilde{B}(\lambda_{1,m}))$  ( $m=1, \dots, n$ ) が含まれているので, 以下でこれらを決定する。まず, 式(3.33)の分母  $A(y)$  は,  $|y| \leq 1$  の領域で  $n$  個の実数の零点を有し, そのうち 1 つは 1 であることが証明できる。(証明略)  $A(y)$  の  $n$  個の零点を  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, 1$  とする。 $g(y)$  は,  $|y| \leq 1$  の領域で解析関数であるから,  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$  は分母の零点でもなければならない。従って次式を得る。

$$B(\omega_i) = 0 \quad i=1, \dots, n-1 \quad (3.36)$$

正規化条件から,

$$B'(1) = (1-f(1))A'(1) \quad (3.37)$$

ここで,

$$A'(1) = \sum_{m=1}^n \frac{\mu_1 \delta_m [(\mu_2 - \lambda_2) \{\lambda_{1,m} + \mu_1(1-f(1))\} - \lambda_{1,m}(\lambda_2 + \mu_1 f'(1))]}{\lambda_{1,m} \{\lambda_{1,m} + \mu_1(1-f(1))\}^2} \quad (3.38)$$

$$B'(1) = \sum_{m=1}^n \frac{\mu_1 g_m \tilde{B}(\lambda_{1,m}) g(\tilde{B}(\lambda_{1,m}))}{(1 - \tilde{B}(\lambda_{1,m})) [\lambda_{1,m} + \lambda_2 (1 - \tilde{B}(\lambda_{1,m})) + \mu_1 \{1 - f(\tilde{B}(\lambda_{1,m}))\}]} \quad (3.39)$$

$n$  次の連立 1 次方程式 (3.36), (3.37) を解くことにより  $g(\tilde{B}(\lambda_{1,m}))$  ( $m=1, \dots, n$ ) が求まる。以上で,  $G(t)$  が  $n$  次の超指数分布の場合について  $g(y)$  が求まった。

### 3.3 ポアソン呼到着時点での系内呼数分布

ポアソン呼到着時点での GI 呼, ポアソン呼の系内呼数が, それぞれ,  $i, j$  である定常確率を  $u_{i,j}$  とする。部分マルコフ過程の率保存原理より次の各式を得る。

$$\lambda_1 \pi_{i,j} + (\lambda_2 + \mu_1) u_{i,j} = \lambda_1 \pi_{i-1,j} + \lambda_2 u_{i,j-1} + \mu_1 u_{i+1,j} \quad i \geq 0, j \geq 0 \quad (3.40)$$

$$\lambda_1 \pi_{0,j} + (\lambda_2 + \bar{\delta}_{j,0} \mu_2) u_{0,j} = \bar{\delta}_{j,1} \lambda_2 u_{0,j-1} + \mu_2 u_{0,j+1} + \mu_1 u_{1,j} \quad j \geq 0 \quad (3.41)$$

ここで,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\bar{\delta}_{i,j} = 1 - \delta_{i,j} \quad (3.43)$$

$\pi_{i,j}$  と  $u_{i,j}$  の関係を求めるため以下の母関数を定義する。

$$U(x, y) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j} x^i y^j \quad (3.44)$$

式 (3.40), (3.41) より次式を得る。

$$U(x, y) = \left[ \left\{ \mu_1 \left(1 - \frac{1}{x}\right) - \mu_2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) \right\} U(0, y) + \mu_2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) u_{0,0} - \frac{\lambda_1 (1-x) g(y)}{1-x f(y)} \right] \\ / \left[ \mu_1 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \lambda_2 (1-y) \right] \quad (3.45)$$

ここで,  $\Pi_i(y) = g(y)[f(y)]^i$  の関係を利用している。  $U(x, y)$  は,  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$  の領域で解析関数であるから, 分母の零点,

$$x = \delta(y) \triangleq \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_2 (1-y)} \quad (3.46)$$

は, 分子の零点でもなければならぬ。  $\delta(y)$  を式(3.45)の右辺の分子の  $x$  に代入して, 分子 = 0 とすることにより  $U(0, y)$  が求まる。こうして求めた  $U(0, y)$  を式(3.45)の右辺に代入すると,  $U(x, y)$  として次式を得る。

$$U(x, y) = \left[ \mu_2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) \left\{ \mu_1 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \lambda_2 (1-y) \right\} u_{0,0} - \left\{ \mu_1 \left(1 - \frac{1}{x}\right) - \mu_2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) \right\} \right. \\ \times \frac{\lambda_1 (1-\delta(y)) g(y)}{1-\delta(y) f(y)} - \left. \left\{ \lambda_2 (1-y) + \mu_2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) \right\} \times \frac{\lambda_1 (1-x) g(y)}{1-x f(y)} \right] \\ / \left[ \left\{ \mu_1 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \lambda_2 (1-y) \right\} \left\{ \lambda_2 (1-y) + \mu_2 \left(1 - \frac{1}{y}\right) \right\} \right] \quad (3.47)$$

式(3.47)の右辺に含まれる未知定数  $u_{0,0}$  は, 正規化条件  $U(1, 1) = 1$  から決定され,

$$u_{0,0} = 1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{\lambda_2}{\mu_2} \quad (3.48)$$

となる。

$u_{0,0} > 0$  , すなわち ,

$$\lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2 < 1$$

が定常状態が存在するための条件である。

### 3. 4 評価尺度

呼種別の平均系内呼数, 平均系内時間は,  $f(y), g(y), V(x, y)$  等を用いて求めることができる。

## 4. 割込み優先権のある $M_1, M_2/M_1, M_2/1$ モデルの解析結果との一致の確認

GI呼の到着過程をポアソン過程としたとき, 章3で得られた結果が割込み優先権のある  $M_1, M_2/M_1, M_2/1$  モデルの解析結果<sup>(10)</sup>と一致することを確認する。

文献(10)によれば, GI呼の到着過程がポアソン過程のとき, 定常状態におけるGI呼, ポアソン呼の系内呼数の同時分布  $\{v_{ij}\}$  の母関数  $V(x, y)$  ( $\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} v_{ij} x^i y^j$ ) は以下で与えられる。

$$V(x, y) = \frac{\mu_2(1-y)v_{0,0}}{(1-x\alpha_1(y))\{\mu_2 - (\mu_1\alpha_2(y) + \mu_2 - \mu_1)\}} \quad (4.1)$$

ここで,

$$\alpha_1(y) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - \lambda_2 y - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - \lambda_2 y)^2 - 4\lambda_1\mu_1}}{2\mu_1} \quad (4.2)$$

$$\alpha_2(y) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - \lambda_2 y + \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - \lambda_2 y)^2 - 4\lambda_1\mu_1}}{2\mu_1} \quad (4.3)$$

以下では，章 3 で求めた GI 呼到着直前の GI 呼，ポアソン呼の系内呼数の同時分布  $\{\pi_{ij}\}$  の母関数  $\Pi(x, y)$  が式 (4.1) と一致することを示す。

$\Pi(x, y) (\triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{ij} x^i y^j)$  は，式 (3.19) を用いると以下となる。

$$\Pi(x, y) = \frac{g(y)}{1 - x f(x)} \quad (4.4)$$

GI 呼の到着過程をパラメータ  $\lambda_1$  のポアソン過程とすると， $f(y)$  は，式 (3.20) より，

$$f(y) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2(1-y) + \mu_1(1-f(y))} \quad (4.5)$$

の， $|y| \leq 1$  の領域で絶対値が 1 以下であるような根である。

式 (4.5) を  $f(y)$  について解くと，

$$f(y) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - \lambda_2 y - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - \lambda_2 y)^2 - 4\lambda_1\mu_1}}{2\mu_1} \quad (4.6)$$

を得る。次に，式 (3.17), (3.21) より次式を得る。

$$\begin{aligned} g(y) & \left[ 1 + \frac{\lambda_1 y}{\lambda_1 + \lambda_2(1-y) + \mu_1(1-f(y))} \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_2 y^2 - (\lambda_2 + \mu_2 + \lambda_1)y + \mu_2} \right] \\ & = \frac{\lambda_1 \mu_1 (1-y) \tilde{B}(\lambda_1) g(\tilde{B}(\lambda_1))}{(1-\tilde{B}(\lambda_1)) \{ \lambda_1 + \lambda_2(1-\tilde{B}(\lambda_1)) + \mu_1(1-f(\tilde{B}(\lambda_1))) \} \{ \lambda_2 y^2 - (\lambda_2 + \mu_2 + \lambda_1)y + \mu_2 \}} \quad (4.7) \end{aligned}$$

式 (4.7) を用いて， $g(y)$  を  $g(0) (= \pi_{0,0})$  を含んだ形に書き換える

と次式を得る。

$$g(y) = \frac{\mu_2 (1-y) g(0)}{\lambda_2 y^2 - (\lambda_2 + \mu_2 + \lambda_1 - \mu_1 f(y)) + \mu_2} \quad (4.8)$$

式(4.8)の右辺の $f(y)$ に式(4.6)を代入して計算すると次式を得る。

$$g(y) = \frac{\mu_2 (1-y) g(0)}{\mu_2 - \lambda_2 y \{ \mu_1 f_2(y) + \mu_2 - \mu_1 \}} \quad (4.9)$$

そこで、

$$f_2(y) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - \lambda_2 y + \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - \lambda_2 y)^2 - 4\lambda_1 \mu_1}}{2\mu_1} \quad (4.10)$$

式(4.4), (4.10) より次式を得る。

$$\Pi(x, y) = \frac{\mu_2 (1-y) g(0)}{(1-x f(x)) [\mu_2 - \lambda_2 y \{ \mu_1 f_2(y) + \mu_2 - \mu_1 \}]} \quad (4.11)$$

式(4.11)と式(4.1)は一致する。

## 5. 数値例

$G(t)$  が対称条件を考慮した 2 次の超指数分布, 指数分布, 2 次のア-ラン分布の場合の数値例を図 2 に示す。横軸は, 生起呼量  $\rho (= \lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2)$ , 縦軸は, ポアソン呼到着時点での平均系内呼数を表す。  $C_f$  は,  $G(t)$  の変動係数を表す。計算条件は,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2$  である。



## 6. おすび

GI呼が割込み優先権をもつ混合入力待ち行列モデルを，部分マルコフ過程の理論を用いて解析し，数値計算の容易な結果を導いた。又，GI呼の到着間隔分布を指数分布としたとき，本稿の結果が従来の結果と一致することを確認した。

残された課題として，図1のモデルA, B, Dの解析がある。

## 文献

(1) 吉田, 竹中, 渡部, 塚田: "メッセージ通信を考慮した多元パケット交換の基礎的検討",

信学論(B), J63-B, 12, PP.1308-1315 (昭55年12月)

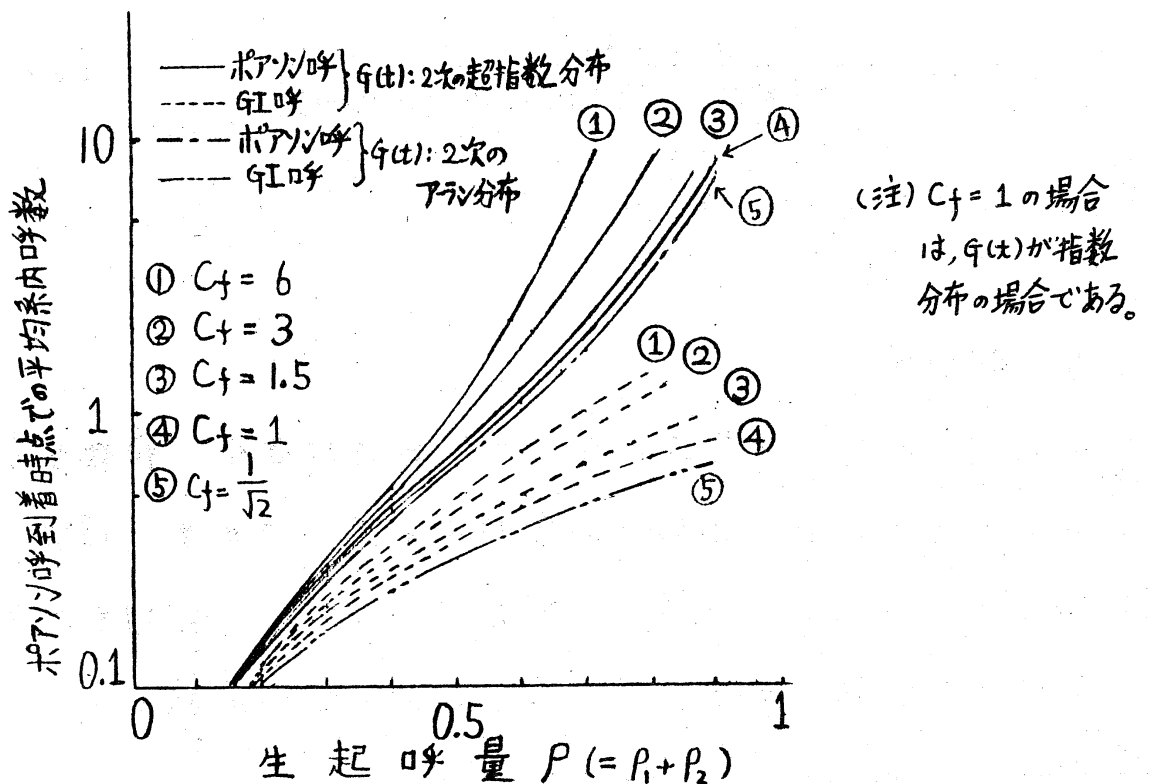


図2 ポアソン呼到着時点での呼種別平均系内呼数

(2) フリオ・セゲル, 田中, 秋山: "音声の無音区間を利用した複合データ伝送方式"

57年度 電子通信学会通信部門全国大会予稿 216 (昭57)

- (3) Hooke, J.A.: "A priority queue with low-priority arrivals general", Oper. Res., 20, pp.373-380 (1971)
- (4) Schassberger, R.: "A broad analysis of single sever priority queues with two independent input streams, one of them Poisson", Adv. Appl. Prob., 6, pp.666-688 (1974)
- (5) Schönherr, S.: "The existence of waiting time moments for single server queues with mixed renewal and Poisson inputs", Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statistics, 12, 2, pp.225-232 (1981)
- (6) Barberis, G.: "A useful tool in the theory of priority queueing", IEEE Trans. Commun., COM-28, 9, pp.1757-1762 (1980)
- (7) Kleinlock, L.: "Queueing Systems Vol.II: Computer Applications", John Wiley & Sons Inc., New York (1974)
- (8) Kuczura, A.: "Queues with mixed renewal and Poisson inputs", Bell Syst. Tech. J., 51, 6, pp.1305-1326 (1972)
- (9) Kuczura, A.: "Piecwise Markov processes", SIAM J. Appl. Math., 24, 2, pp.169-181 (1973)
- (10) Heathcote, C.R.: "A simple queue with several preemptive priority classes", Oper. Res., 8, pp.630-638 (1960)
- (11) Prabhu, N.U.: "Queues and Inventories", John Wiley & Sons Inc., New York (1965)

### 付録1 M/M/1モデルの遷移確率 $p_{ij}(t)$ のラプラス変換 $\tilde{p}_{ij}(s)$

到着率 $\lambda_2$ , 処理率 $\mu_2$ のM/M/1モデルの遷移確率 $p_{ij}(t)$ のラプラス変換を $\tilde{p}_{ij}(s)$ とする。  $\tilde{Q}_i(z, s) \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij}(s) z^j$  と定義すると,  $\tilde{Q}_i(z, s)$  は以下で与えられる。(11)

$$\tilde{Q}_i(z, s) = \frac{(1-z)[\tilde{B}(s)]^{i+1} - z^{i+1}(1-\tilde{B}(s))}{(1-\tilde{B}(s))\{\lambda_2 z^2 - (\lambda_2 + \mu_2 + s)z + \mu_2\}} \quad (A.1.1)$$

$\tilde{B}(s)$  は, M/M/1モデルの全稼働期間分布のLSTで, 以下である。

$$\tilde{B}(s) = \frac{\lambda_2 + \mu_2 + s - \sqrt{(\lambda_2 + \mu_2 + s)^2 - 4\lambda_2 \mu_2}}{2\lambda_2} \quad (A.1.2)$$

## 付録2 $\tilde{Q}(y, s)$ の導出

式(3.15)をラプラス変換すると,

$$\tilde{Q}(y, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{k,l} y^j \tilde{g}_{k+n,j}(s) \cdot \frac{(n+k)!}{n! k!} \lambda_2^n \mu_1^{k+1} \left( \frac{1}{\lambda_2 + \mu_1 + s} \right)^{n+k+1} \quad (\text{A.2.1})$$

付録1の式(A.1.1)を用いると次式が導出される。

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(y, s) &= \frac{1}{(1 - \tilde{B}(s)) \{ \lambda_2 y^2 - (\lambda_2 + \mu_2 + s) y + \mu_2 \}} \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{k,l} \{ (1-y) [\tilde{B}(s)]^{l+n+1} \\ &\quad - y^{l+n+1} (1 - \tilde{B}(s)) \} \frac{(n+k)!}{n! k!} \lambda_2^n \mu_1^{k+1} \left( \frac{1}{\lambda_2 + \mu_1 + s} \right)^{n+k+1} \\ &= \frac{1}{(1 - \tilde{B}(s)) \{ \lambda_2 y^2 - (\lambda_2 + \mu_2 + s) y + \mu_2 \}} \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{ (1-y) [\tilde{B}(s)]^{n+1} \pi_k(\tilde{B}(s)) \\ &\quad - y^{n+1} (1 - \tilde{B}(s)) \pi_k(y) \} \frac{(n+k)!}{n! k!} \lambda_2^n \mu_1^{k+1} \left( \frac{1}{\lambda_2 + \mu_1 + s} \right)^{n+k+1} \quad (\text{A.2.2}) \end{aligned}$$

上式に式(3.19)を代入すると,

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(y, s) &= \frac{1}{(1 - \tilde{B}(s)) \{ \lambda_2 y^2 - (\lambda_2 + \mu_2 + s) y + \mu_2 \}} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{ (1-y) [\tilde{B}(s)]^{n+1} g(\tilde{B}(s)) [f(\tilde{B}(s))]^k - y^{n+1} (1 - \tilde{B}(s)) g(y) [f(y)]^k \} \\ &\quad \times \frac{(n+k)!}{n! k!} \lambda_2^n \mu_1^{k+1} \left( \frac{1}{\lambda_2 + \mu_1 + s} \right)^{n+k+1} \quad (\text{A.2.3}) \end{aligned}$$

式(A.2.3)を簡略化するため次の恒等式を用いる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n! k!} a^n b^k c^{n+k} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n+k=l} \frac{(n+k)!}{n! k!} a^n b^k c^{n+k} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} c^l \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} a^{l-k} b^k \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} c^l (a+b)^l \\
 &= \frac{1}{1 - c(a+b)} \quad (A.2.4)
 \end{aligned}$$

$\sum_{n+k=l}$  は,  $n+k=l$  を満足する非負整数  $(n, k)$  のすべての組合せについて和をとるものとする。また,  $|c(a+b)| < 1$  が仮定されている。

式(A.2.4)を用いると, 式(A.2.3)は以下となる。

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q}(y, S) &= \frac{1}{(1 - \tilde{B}(S)) \{ \lambda_2 y^2 - (\lambda_2 + \mu_2 + S)y + \mu_2 \}} \\
 &\times \left\{ \frac{(1-y) \tilde{B}(S) g(\tilde{B}(S))}{S + \lambda_2 (1 - \tilde{B}(S)) + \mu_1 (1 - f(\tilde{B}(S)))} - \frac{(1 - \tilde{B}(S)) y g(y)}{S + \lambda_2 (1-y) + \mu_1 (1 - f(y))} \right\} \\
 &\quad (A.2.5)
 \end{aligned}$$